Задача: мы знаем уровни энергии атома протона:

$$E_n = -\frac{2me^4}{h^2} * \frac{Z^2}{n^2}$$

Как изменится энергия n-того уровня, если атом водорода вместо протия (голого протона) будет дейтерий (протон+нейтрон)?

Мысль 1: Никак. В формуле у нас масса электрона, а она не меняется.

Мысль 1 близка к правде – энергия почти не меняется. Но всё-таки чуть-чуть поменяется.

Мысль 2: В формуле у нас эффективная масса!

Напомним, что весь вывод атома водорода базировался на том, что ядро покоится. Меж тем оно чуть-чуть, но также движется.

Вообще гамильтониан системы

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_p} + \frac{\hat{p}^2}{2m_e} + U(r_{p-e})$$

можно записать как

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + U(r_{p-e})$$

Где M – суммарная масса $M = m_p + m_e$, а $\mu = \frac{2m_p m_e}{m_p + m_e}$ -т.н. эффективная, или приведённая масса.

Этот факт подробно изучается на теормехе (правда, вам он, может быть, давался в терминах лагранжианов, а не гамильтонианов, но там лишь знак $U(r_{p-e})$ поменяется, а в остальном останется так же).

Физический смысл очень простой: энергия делится на энергию движения центра масс $\frac{\hat{p}^2}{2M}$ и энергию относительного движения $\frac{\hat{p}^2}{2\mu}$ некой эффективной массы μ.

Мне ещё немного хочется остановиться на выражении $\frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$, а точнее – на его удвоенном: $\frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$. Это – среднее гармоническое m_e и m_p: обратное к среднему арифметическому обратных исходных величин:

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)}$$

Можете погуглить про него. Также можно вспомнить баянную задачу из 5-6-7 класса: машина ехала первую половину пути со скоростью a, вторую со скоростью b. Чему равна средняя скорость? (не путать с задачей, где «первую половину ВРЕМЕНИ», там ответом будет банальное среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$). Будет равна среднему гармоническому (убедитесь сами ☺)

Примеры:

Первая масса	Вторая масса	Их приведённая масса $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$
m	m	$\frac{m}{2}$
$2m$	m	$\frac{2m}{3}$
$3m$	m	$\frac{3m}{4}$
$100m$	m	$\frac{100m}{101}$

Как мы видим, при больших отношениях масса приведённая масса близка к массе легчайшего тела. Поэтому в формуле $E_n = -\frac{2me^4}{h^2} * \frac{Z^2}{n^2}$ подстановка вместо приведенной массы массы электрона – хорошее приближение. Сделаем же теперь точно.

Итак, старое значение энергии при n=1 есть

$$E_p = -\frac{2\mu_{pe} e^4}{h^2}$$

где μ_{pe} – приведённая масса электрона и протона.

А когда у нас дейтрон,

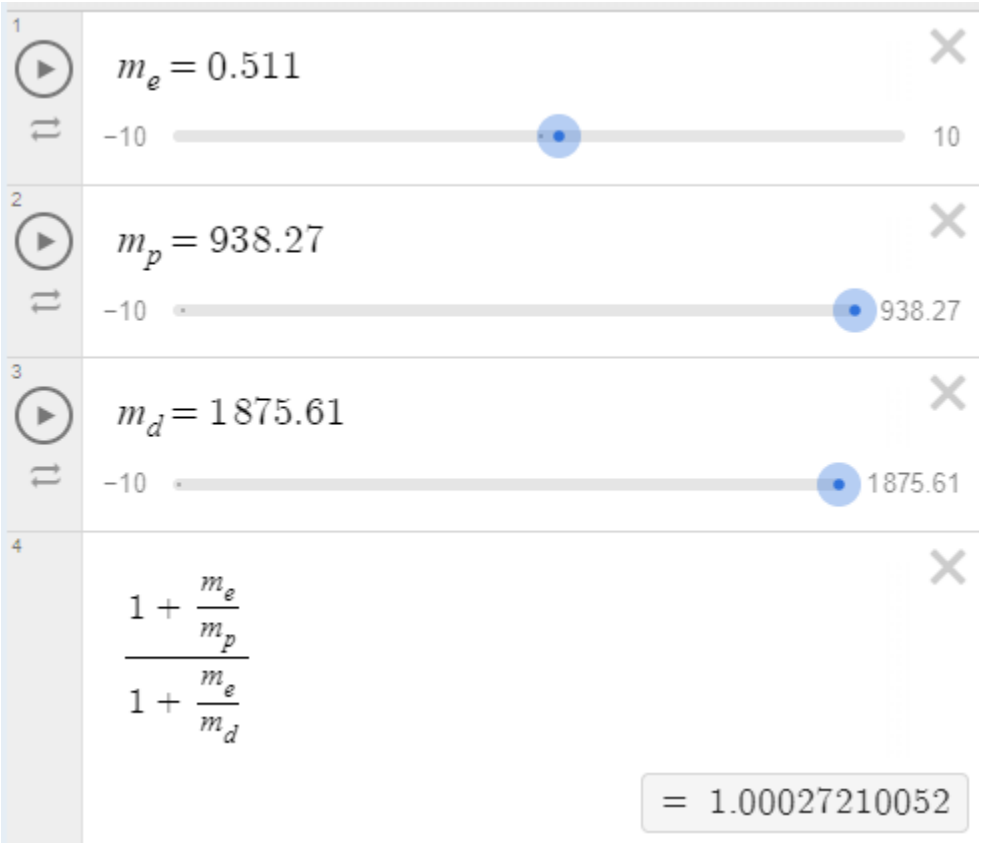
$$E_d = -\frac{2\mu_{de} e^4}{h^2}$$

где μ_{de} – приведённая масса электрона и протона.

$$\frac{E_d}{E_p} = \frac{\mu_{de}}{\mu_{pe}} = \frac{\left(\frac{m_d m_e}{m_d+m_e}\right)}{\left(\frac{m_p m_e}{m_p+m_e}\right)} = \frac{m_d(m_p + m_e)}{m_p(m_d + m_e)} = \frac{1 + m_e/m_p}{1 + m_e/m_d}$$

Выполняем подстановки:

https://www.desmos.com/calculator/8djk3y9bny



Ответ: все уровни по энергии вырастут на 0,027%.
(читателю предоставляется проделать аналогичные расчёты для трития)

Как объяснить результат качественно – почему рост? Потому что выросло отношение масс и больше энергии ушло в относительное движение и меньше в движение центра масс.